ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΠΑΓΩΓΗ

Ⓐ

1) ⓐ ΝΔΟ $\forall \nu \in \mathbb{N}^*$ $\quad 11 \mid (9^\nu + 2^{6\nu-5})$

ⓑ i. Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ και $\nu \in \mathbb{N}^*$ νδο $\alpha^\nu - \beta^\nu = k\cdot(\alpha-\beta)$, $k \in \mathbb{Z}$

ii. ΝΔΟ $\forall \nu \in \mathbb{N}^*$: $3^{2\nu+1} + 2^{\nu+2} = \lambda \cdot 7$, $\lambda \in \mathbb{Z}^*$

ΛΥΣΗ

ⓐ • Για $\nu = 1 \rightsquigarrow 11 \mid (9+2) \Rightarrow P(1)$ αληθής

• Έστω ότι $P(k)$ αληθής και ΘΔΟ $P(k+1)$ αληθής όπου $k > 1$.

$P(k)$ αληθής $\Rightarrow 11 \mid (9^k + 2^{6k-5}) \Rightarrow$

$\Rightarrow 9^k + 2^{6k-5} = 11\cdot\mu, \ \mu \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2^{6k-5} = 11\mu - 9^k \quad (1)$

$9^{k+1} + 2^{6(k+1)-5} = 9\cdot 9^k + 2^{6k+6-5} = 9\cdot 9^k + 2^6\cdot 2^{6k-5} \overset{(1)}{=}$

$\overset{(1)}{=} 9\cdot 9^k + 2^6\cdot(11\mu - 9^k) = 9\cdot 9^k + 64\cdot 11k - 64\cdot 9^k =$

$= 64\cdot 11k - 55\cdot 9^k = 11\cdot 64k - 5\cdot 11\, 9^k = 11(64k - 5\cdot 9^k)$

$= 11\cdot\mu', \ \mu' = 64k - 5\cdot 9^k \in \mathbb{Z}$

Άρα, $P(\nu)$ αληθής $\forall \nu \in \mathbb{N}^*$

ⓑ i. $\alpha^\nu - \beta^\nu = (\alpha-\beta)\underbrace{(\alpha^{\nu-1} + \beta\cdot\alpha^{\nu-2} + \dots + \beta^{\nu-1})}_{k} = k\cdot(\alpha-\beta)$

ii. $\forall \nu \in \mathbb{N}^*$:

$3^{2\nu+1} + 2^{\nu+2} = 3\cdot 3^{2\nu} + 2^\nu\cdot 2^2 = 3\cdot 9^\nu + 4\cdot 2^\nu =$

$= 3\cdot 9^\nu + (7-3)2^\nu = 3\cdot 9^\nu + 7\cdot 2^\nu - 3\cdot 2^\nu = 3(9^\nu - 2^\nu) + 7\cdot 2^\nu$

$\overset{(i)}{=} 3\cdot k(9-2) + 7\cdot 2^\nu = 7\cdot 3k + 7\cdot 2^\nu = 7(3k + 2^\nu) = 7\lambda$

B

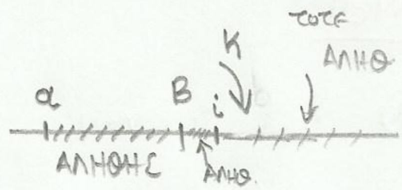
ΙΣΧΥΡΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΠΑΓΩΓΗ

2) Δίνεται η ακολουθία Fibonacci

$F_1=F_2=1$ και $F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$, $n\geq 2$

ΝΔΟ $F_n<\left(\frac{7}{4}\right)^n$

ΛΥΣΗ



Για $n=2$, $F_2<\left(\frac{7}{4}\right)^2$ ισχύει

Υποθέτουμε ότι ισχύει για όλους τους φυσικούς έως και το k, όπου $2\leq i\leq k$.

Άρα, $F_i<\left(\frac{7}{4}\right)^i$ και ΘΔΟ ισχύει για $k+1$

$$F_{k+1}=F_k+F_{k-1}<\left(\frac{7}{4}\right)^k+\left(\frac{7}{4}\right)^{k-1}=\left(\frac{7}{4}\right)^k+\left(\frac{7}{4}\right)^k\cdot\frac{4}{7}=$$

$$=\left(\frac{7}{4}\right)^k\left(1+\frac{4}{7}\right)=\left(\frac{7}{4}\right)^k\cdot\frac{11}{7}\overset{\text{ΘΔΟ}}{<}\left(\frac{7}{4}\right)^{k+1}$$

Έστω ότι ισχύει:

$$\cancel{\left(\frac{7}{4}\right)^k}\cdot\frac{11}{7}<\cancel{\left(\frac{7}{4}\right)^k}\cdot\frac{7}{4}\Rightarrow 44<49 \text{ ισχύει}$$

Άρα, $F_{k+1}<\left(\frac{7}{4}\right)^{k+1}$, $k\geq 2$

Συνεπώς, η $P(\nu)$ αληθής.

ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΚΑΛΗΣ ΔΙΑΤΑΞΗΣ

©

3) Έστω $\frac{p}{q}$ αναγωγο κλάσμα.

Να βρέθει το αναγωγο κλασμα ενός ρητού $r \in \mathbb{Q}$ με τη βοήθεια της καλής διάταξης

ΛΥΣΗ

$\frac{p}{q}$: αναγωγο $\Rightarrow (p, q) = 1$

Έστω $S = \{ n \in \mathbb{N}^* \mid n \cdot r \in \mathbb{Z} \} \neq \phi$, $S \subseteq \mathbb{N}^*$

(Ψάχνω $r = \frac{\alpha}{\beta}$: ανάγωγο)

Απο την καλή Διάταξη το S έχει ελάχιστο στοιχείο το n_0. Άρα, $n_0 \cdot r \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = n_0 \cdot r \in \mathbb{Z}$

Δηλαδή, $r = \frac{m}{n_0}$, και θέλω $(m, n_0) = 1$

Έστω $(m, n_0) \neq 1 \Rightarrow \exists\, \rho$: πρώτος ωστε

$$\left.\begin{array}{l} \rho \mid m \Rightarrow m = m' \cdot \rho \\ \rho \mid n_0 \Rightarrow n_0 = n_0' \cdot \rho \end{array}\right\} r = \frac{m' \cdot \cancel{\rho}}{n_0' \cdot \cancel{\rho}} = \frac{m'}{n_0'} \Rightarrow$$

$\Rightarrow n_0' \cdot r = m' < m$ (αφού το διαιρεί)

και $n_0' < n_0$ (αφού το διαιρεί)

Αυτό, όμως είναι άτοπο αφού το n_0 ελαχιστο στοιχείο του S

Άρα, $(m, n_0) = 1 \Rightarrow$ Πρώτοι μεταξύ τους

$\Rightarrow$ το $r = \frac{m}{n_0}$: αναγωγο